CONCOURS COMMUN

E.N.S.A.M.

SESSION 1984

MATHÉMATIQUES

Options T et TA

Épreuve n° 2 (problème)

Durée : 3 heures

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3 rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. E est l'espace vectoriel associé.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées 3x3 à coefficients réels.

Un point M de $\mathcal{E}$ est repéré par ses coordonnées $(x, y, z,)$ dans $\mathcal{R}$.

On définit les ensembles :

$$T = \{ M(x, y, z) \in \mathcal{E} \mid x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ z \geqslant 0;\ x + y + z = 1 \}$$

$$\Delta = \{ M(x, y, z) \in \mathcal{E} \mid x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ z \geqslant 0;\ x + y + z \leqslant 1 \}$$

Question préliminaire: Donner une interprétation géométrique des ensembles T et Δ.

PARTIE I

1°) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont respectivement les matrices colonnes des coordonnées des points M et M' de $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
A toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on associe l'application:

$$\hat{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \text{ par } M' = \hat{A}(M) \Leftrightarrow X' = AX.$$

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que T soit stable par $\hat{A}$

c'est à dire $$A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \hat{A}(T) \subset T.$$

Trouver un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes auquel doivent satisfaire les coefficients d'une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour qu'elle appartienne à l'ensemble $\mathcal{C}$.

2°) Soit $A \in \mathcal{C}$; Δ est-il stable par $\hat{A}$?

3°) Soit $A \in \mathcal{C}$. Montrer que 1 est valeur propre de A.

Montrer que, pour toute valeur propre λ de A, réelle ou complexe, on a $|\lambda| \leqslant 1$.
On pourra utiliser le fait, après l'avoir justifié, qu'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.
Que peut-on dire de la valeur absolue du déterminant de A?

4°) Soit $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{C}$ qui appartiennent au groupe orthogonal de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer toutes les matrices de l'ensemble $\mathcal{C}_1$. Peut-on dire que $\mathcal{C}_1$ est un sous-groupe du groupe orthogonal de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
Donner une interprétation géométrique de chacune des applications de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ associées aux matrices de $\mathcal{C}_1$.

PARTIE II

Dans toute cette partie on prend $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1°) Vérifier que $A \in \mathcal{C}$; quelle est l'image de T par $\hat{A}$, soit $T' = \hat{A}(T)$?

2°) Pourquoi peut-on affirmer a priori que A est diagonalisable ?
Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.

3°) Soit $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$ un point de T. On définit la suite des points M_n par $M_n = \hat{A}(M_{n-1})$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ (entiers > 0). Etudier la limite de M_n quand $n \to +\infty$.

4°) A tout point M_0 de T on associe la suite des points K_n par: $\overrightarrow{OK_n} = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^m \overrightarrow{OM_m}$

la suite des points M_n étant celle qui a été définie à la question précédente.

Etudier la limite de K_n quand $n \to +\infty$. Cette limite sera notée $K(M_0)$.

Quel est l'ensemble décrit par $K(M_0)$ quand M_0 décrit T?

PARTIE III

Soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in E$.

On note E_1 l'ensemble des éléments non nuls de E et $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ distincts du point O.

Soit $f: E_1 \to E \quad f(\vec{v}) = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ où $\|\vec{v}\|$ est la norme euclidienne de $\vec{v}$.

Soit $g: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \quad M' = g(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = f(\overrightarrow{OM})$.

1°) Déterminer $g(T)$, transformé par g de l'ensemble T.

2°) Montrer que f est différentiable en tout $\vec{v}$ de E_1.

Ecrire la matrice jacobienne de f en $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

3°) Donner une interprétation géométrique simple de la différentielle de f en $\vec{i}$.

4°) En se plaçant maintenant en $\vec{v}$ (x, y, z) quelconque de E_1, montrer que la différentielle de f en $\vec{v}$ est le produit d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan.